凸錐状特異点への実解析解の接続(超函数と微分方程式)

金子, 晃

数理解析研究所講究録
592巻 1986年 149-172

凸錐状特異点への実解析解の接続

東大教養　金子　晃（Akira KANEKO）
(Dept.of Math., College of
Gen.Educ., Univ.of Tokyo)

§0. 序

またまた実解析解の接続の話をさせて頂くことをお許し願いたい．　今回の目標は例のHartogs型の実解析解の接続定理：KをR^nの凸コンパクト集合と半空間　$x_n<0$ の交わり，Uをその近傍とするとき

$$\mathscr{A}_P(U\setminus K)/\mathscr{A}_P(U)=0 \tag{0.1}$$

となるための（即ち$U\setminus K$上の　$Pu=0$　の実解析解がU上の実解析解に延長できるための）条件を、特に“太った”Kについて大幅に改良することである．　始めに12年前の小生の博士論文の結果を引用して話のまくらとしたい．

定理0（Kaneko[2]）P(D)を定数係数の線型偏微分作用素とする．　Pの各既約成分qが次のいずれかの条件を満たすならば(1.1)が成り立つ．

イ）　qが双曲型であるような方向の列でdx_n方向に収束するものが存在する．

ロ）　$x_n=0$を変えない適当な線型座標変換でqの複素零点集合　$N(q)=\{\zeta\in C^n;\ q(\zeta)=0\}$上次の不等式が成り立つようにできる：$2\leqq\exists k\leqq n-1$があり，$\forall\varepsilon>0$に対し$\exists C_\varepsilon$をとれば　$\mathrm{Im}\,\zeta_n>0$　において

$$|\mathrm{Im}\,\zeta_1|\leqq\varepsilon\sum_{j=2}^{n}|\zeta_j|+A\sum_{j=2}^{k}|\mathrm{Re}\,\zeta_j|+B\sum_{j=2}^{n-1}|\mathrm{Im}\,\zeta_j|+C_\varepsilon, \tag{0.2}$$

$$\sum_{j=2}^{k}|\mathrm{Re}\,\zeta_j|\leqq\varepsilon|\zeta|+B\sum_{j=1}^{n-1}|\mathrm{Im}\,\zeta_j|+C_\varepsilon. \tag{0.3}$$

ハ）　$x_n=0$を変えない適当な線型座標変換で　$K\subset\{x_1=0\}$　かつ$N(q)$上次の不等式が成り立つようにできる：　$\forall\varepsilon>0$に対し$\exists C_\varepsilon$をとれば，$\mathrm{Im}\,\zeta_n>0$において

$$|\mathrm{Im}\,\zeta_1|\leqq\varepsilon|\zeta_n|+b|\mathrm{Im}\,\zeta_n|+C_{\varepsilon,\zeta_2,\ldots,\zeta_{n-1}}. \tag{0.4}$$

（我々はhyperfunction　categoryで考えているので、双曲型とは即ち主部

が双曲型なことを云う．）　この論文を M.Hervé が Reviewしてくれたのだがイ）だけを取りあげてあとは全部無視してしまった．　実はイ）は，双曲型方向へは任意の超函数解が非特性境界を越えて延ばせることと解析接続の一意性とから容易に従う結論なので，小生としては苦労した肝心の部分を無視されていささか心外であった（結果の重要性は主観的な苦労の量とは必ずしも関係ないのではあろうが）．　ハ）は云わば“薄い”特異点集合を扱ったもので，このような既約因子が増すほど定理の適用できるＫは痩せ細ってゆかねばならない．　これについては後に一般に非特性超曲面に含まれるようなＫについて超函数論的境界値問題の理論を応用した変数係数の作用素も取り扱えるような方法論が開発され，上の結果自身もこうしたミクロ局所的な立場からの完全な解釈がなされている．　故にこの場合は Kaneko [4] の解説と [6]の結果，及び大阿久氏による種々の拡張 [1]，[2] 等を参照して頂くこととし，今日は“太った”特異点集合Ｋについて変数係数の場合も込めた展望を行おう．　以下次の順序で話を進める

1．定数係数の作用素に対する $\mathscr{A}_P(U\setminus K)/\mathscr{A}(U)=0$のための条件 ― その１．一つの必要条件．

2．―― その２．抽象的必要十分条件と十分条件の拡張．

3．―― その３．凸錐の頂点への実解析解の局所的延長のための十分条件．

4．変数係数の作用素に対する凸錐の頂点への実解析解の局所的延長の諸方法

付録．熱方程式に対する函数解析的方法．

§1. 定数係数の作用素に対する$\mathscr{A}_P(U\setminus K)/\mathscr{A}_P(U)=0$のための一つの必要条件

実際の議論を始める前に次のことを注意しよう： ただ一つの固定したKについて$\mathscr{A}_P(U\setminus K)/\mathscr{A}_P(U)=0$となる条件を求めることは議論を非常に窮屈にする．実際には $U_\varepsilon=U\cap\{x_n<-\varepsilon\}$ とおき

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathscr{A}_P(U_\varepsilon\setminus K)/\mathscr{A}_P(U_\varepsilon)=0 \tag{1.1}$$

となる条件を求める方が合理的である．これは議論の途中でKの近傍において実解析函数を右辺とする方程式 $P(D)u=f$を解かねばならぬ事態がしばしば起こるのだが、この大域解の存在定理が一般にはKを少し切り詰めた$K_\varepsilon=K\cap\{x_n<-\varepsilon\}$の近傍でしか保証されないからである．(1.1)からもちろん(0.1)が従い，また既知の十分条件はすべて(1.1)を保証するようなものなので，このような注意が意味を持つのは専ら必要条件を求めるときだけである．

さて(1.1)の形にすると次のようなことがわかる：

イ）この条件はPに対して仮定するのと、Pの各既約成分に対して仮定するのと同値である．従って始めからPを既約と仮定して議論することができる．

ロ）この条件はKのみに依り，その近傍Uの選び方に依らぬ．従って特に$U=\{x_n<0\}$としてもよい．このことはKが凸でなくてもその補集合が連結でありさえすれば成立する．証明はKaneko [2]，[3]を見られたい．

さて本論に戻り，まず定理0の条件イ）がある意味で必要十分であることを示そう．

定理1.1　$\overline{K}\cap\{x_n=0\}$が内点を持つようなKについて(1.1)が成立し，更にdx_nはPの非特性方向とする．このときPはdx_n方向に双曲型となる．

証明　非特性曲面$S=\{x_n=\varphi(x')\}$で$\phi\neq S\cap\{x_n<0\}\subset K$となるものを選ぶ．以下$S\cap\{x_n<0\}$を単にSと書き，S上の座標として$x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$を使おう．Pの階数だけの初期値$u_0(x'),\ldots,u_{m-1}(x')\in\mathscr{A}(S)$を任意に与えたとき，Cauchy-Kowalevskyの定理が与える $Pu=0$ のSの近傍での局所解を$u(x)$とする．$\mathscr{A}$に対する一次コホモロジー消滅定理により

$$u(x) = v(x) - w(x),$$
$$v\in\mathscr{A}(\{x_n<0,\ x_n\leqq\varphi(x')\}),$$
$$w\in\mathscr{A}(\{\varphi(x_n)\leqq x_n<0\})$$

と分解できる．このとき共通の定義域上で

$$0 = Pu = Pv - Pw.$$

故に $f = Pv = Pw$ は $\mathscr{A}'(\{x_n < 0\})$ の元となるから $Pg = f$ の大域的実解析解 g をとれば（必要なら U を縮めることにより）$v - g \in \mathscr{A}'_P(U_\varepsilon \setminus K)$．仮定よりこれが U_ε 全体に延びたとすると U が，従って u 自身 $\varphi(x') \leq x_n < -\varepsilon$ まで延びたことになる．ε は任意だからこれは実解析的初期値に対するCauchy問題の解が初期値によらぬ一定の存在域 $\varphi(x') \leq x_n < 0$ を持つことを意味し，従って（例えばMizohata［ 1 ］参照）P は dx_n 方向に双曲型となる．証了．

この定理から太った K については方向 dx_n が接続定理の成立する方向として孤立していなければ序に掲げた定理の場合イ）が可能なすべての場合を尽していることになる．従って面白い場合を調べようと思うなら，ロ）のように P が dx_n 方向に退化している場合を取扱うか（その代表例は熱方程式 $P(D) = D_1^2 + \cdots + D_{n-1}^2 + iD_n$ である．ここでは低階はもちろん何でも良い．従ってSchrödingerでも良い），或はハ）のように“薄い”K に考察を絞るかしか無いのであろうか？ところでKaneko［ 2 ］を準備中に後者の代表例である

$$P(D) = D_1^2 - D_2^2 - \cdots - D_n^2$$

を調べてみて思ったことがある．この P にはtimelikeな二次曲線 $x_n = \varphi(x_1)$，$x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$ を特異点集合に持つ解があるので“太った”K に対する実解析解の接続定理は成立しないのであるが，この集合はいくつかを重畳させることにより錐 $x_n \geq |x_1|$，$x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$ にいくらでも近づけることができるのにも拘ず，錐自身にはどうしても到達できそうにない．*) そこで“太った”K についても（0.4）の仮定から K の“尖った部分”の近傍への局所的な接続定理だけは導けるのではないか？このことは当時指導教官にも宣言したのだがその後ずっとできずに放ってあった．今回の主目標は変数係数の作用素の場合も含めてこのような形の接続定理を追究することにあったのだが，ワープロの改良に時間をとられたこともあってまだ満足すべき結果に到達していない．しかし一般の K についての大域的な接続定理が少し改良できたので，まずそれを報告させて頂く．

---

*) このことは後に $x_2 = 0$ 方向の境界値の特異スペクトル評価と西瓜割り定理を用いて確認することができた．但し K が $x_2 = 0$ に入っていない場合一般にはまだわからない．

§2．抽象的必要十分条件と十分条件の拡張

ここでは定数係数の場合の既存の方法論をより整理した形で復習し合わせて定理0のロ）の結果を改良することを試みる．前節の始めに注意したことにより，十分条件を示すのならば与えられたKよりは大きめのK，例えば円錐について（1．1）を云えば良いし，また逆に$\overline{K}\cap\{x_n=0\}$が内点を持つようなKは内部に円錐を含むので（1．1）の成立がKの相似的形状のみならずそのサイズによっても左右されるような特異な状況を別にすれば，（1．1）を吟味するのにKを円錐と仮定しても十分であるが，それで記号が簡単になるわけでもないのでしばらくはKを一般にしておく．さてまず商空間$\mathscr{A}_P(U\setminus K)/\mathscr{A}_P(U)$のGrusin表現を思い出そう．簡単のため以下Pは既約とし，平面$x_n=0$のコンパクト部分集合$\overline{K}\setminus K$を（やや記号の濫用だが）∂Kと略記しよう．$u\in\mathscr{A}_P(U\setminus K)$に対しこれを$\mathscr{B}(U)$の元に延長したものを$[u]$とすれば$P(D)[u]\in\Gamma_K(U,\mathscr{B})$．そこでこれを更に$\mathscr{B}[K]$の元に延長したもの$[[P(D)[u]]]$をとり

$$(2.1)\quad \tilde{d}:\mathscr{A}_P(U\setminus K)/\mathscr{A}_P(U)\to\widehat{\mathscr{B}[K]}\{N(P)\}/\widehat{\mathscr{B}[\partial K]}\{N(P)\}$$
$$u\longmapsto\widehat{[[P(D)[u]]]}\big|_{N(P)}$$

という写像を定義する．ただし$\widehat{\ }$はFourier変換を表し，一般に$\widehat{\mathscr{B}[L]}\{N(P)\}$はN(P)上の大域的正則函数で$\widehat{\mathscr{B}[L]}$の元と同じ増大度条件を満たすものの空間である．これがKaneko［2］で用いられたGrušin表現（の一般化）であった．この写像は超函数解の空間$\mathscr{B}_P(U\setminus K)/\mathscr{B}_P(U)$に対してもwell-definedなので我々は特にuが実解析解であるときの$\tilde{d}$の像の特徴をつかまなければならない．そこで延長［u］の代わりに滑らかな切断函数$\psi_\varepsilon(x)$によりuをKの近傍で0に落したもの$\chi_\varepsilon P(D)(\psi_\varepsilon u)$を採用することにすれば，Fourier変換の増大度は虚座標の方向には$\varepsilon|\mathrm{Im}\zeta|$程度悪くなるが実軸方向には有界（実は急減少にできるが我々はそこまで必要としない）とすることができる：

$$|\widehat{\chi_\varepsilon P(D)(\psi_\varepsilon u)}|\leqq C\exp(H_{\overline{K}_\varepsilon}(\mathrm{Im}\zeta)).$$

ここに$\overline{K}_\varepsilon$は$\overline{K}$の閉ε-近傍のうち$x_n\leqq 0$の部分を表す．さて，［2］のようにこれと$\widehat{[[P(D)[u]]]}$との差を考えたのでは実軸方向にどうしてもinfra-exponentialな増大度が現れPhragmén-Lindelöf型の定理の処理でやや面倒となるのでここではψ_ε，χ_εの選び方による二つの元の差を見ることにすると，N(P)上ではψ_εの

差に由来する主要項は消失し，結局大きい方のεについて

$$\leqq C\exp(H_{\partial K_\varepsilon}(\mathrm{Im}\zeta))$$

の形の評価を持つものとなる．ここに∂K_εは∂Kの閉ε-近傍の$x_n\leqq 0$の部分を表す．故にGrušin表現の表現空間として

$$(2.2)\qquad \varprojlim_{\varepsilon\downarrow 0} \widehat{\mathscr{E}'(\overline{K}_\varepsilon)}\{N(P)\}/\widehat{\mathscr{E}'(\partial K_\varepsilon)}\{N(P)\}$$

を採用してみよう． ここで一般に$\widehat{\mathscr{E}'(L)}\{N(P)\}$は$N(P)$上の大域的正則函数で$\widehat{\mathscr{E}'(L)}$と同じ増大度条件を満たすものの空間を表す．この射影系は系の射が一対一になっておらず，また(2.1)の空間との対応もあまり自然ではないので気持は悪いが，射影系(1.1)にはよく対応しており，また以下の議論にはこの方が取扱い易い．

命題2.1 上の構成法で空間(1.1)から(2.2)への写像$\tilde{d}$が定まる．更にこの像は次の増大度条件で特徴づけられる：$\forall\,\varepsilon>0$に対し$\delta_\varepsilon, C_\varepsilon>0$を適当にとるとき，適当な代表元$F_\varepsilon(\zeta)\in\widehat{\mathscr{E}'(\overline{K}_\varepsilon)}\{N(P)\}$について

$$(2.3)\ |F_\varepsilon(\zeta)|\leqq C_\varepsilon\exp(H_{\partial K_\varepsilon}(\mathrm{Im}\zeta))+C_\varepsilon\exp(-\delta_\varepsilon|\zeta|+H_{\overline{K}_\varepsilon}(\mathrm{Im}\zeta)).$$

証明 上の構成法を(1.1)の元に適用するには任意に固定したεについて代表元$u_\varepsilon\in\mathscr{A}_P(U_{\varepsilon/2}\setminus K)/\mathscr{A}_P(U_{\varepsilon/2})$をとり$U_{\varepsilon/2}$を$U$と思って$\tilde{d}u_\varepsilon\in\widehat{\mathscr{E}'(\overline{K}_\varepsilon)}\{N(P)\}/\widehat{\mathscr{E}'(\partial K_\varepsilon)}\{N(P)\}$を構成する．この元が射影系の写像と両立することは容易に確められる．今εを固定し$u_\varepsilon\in\mathscr{A}_P(U_{\varepsilon/2}\setminus K)$に対し，各$k$について切断函数 $\psi_{\varepsilon,k}$, $\chi_{\varepsilon,k}$としてコンパクト台の近似実解析函数をとれば，$F_{\varepsilon,k}(\zeta)=\widehat{\chi_{\varepsilon,k}(x)P(D)(\psi_{\varepsilon,k}u)}$ は

$$(2.4)\qquad |F_{\varepsilon,k}(\zeta)|\leqq C_\varepsilon B_\varepsilon^k k^k(1+|\zeta|)^{-k}\exp(H_{\overline{K}_\varepsilon}(\mathrm{Im}\zeta))$$

を満たす．またkをとり替えたときの代表元の差は

$$\leqq C_\varepsilon\exp(H_{\partial K_\varepsilon}(\mathrm{Im}\zeta))$$

という評価を満たす．この定数C_εはkには依存しないことに注意せよ．故に各ζに対し(2.4)において$k\cong a_\varepsilon|\zeta|$, $a_\varepsilon\ll 1$となる代表元$F_{\varepsilon,k}(\zeta)$で(2.4)を評価すれば(2.3)が得られる．

逆に(2.3)を満たす(2.2)の元があったとする．εを任意に固定し代表元$F_\varepsilon(\zeta)$をとる．このようなF_εはまず$\mathscr{E}'$に対する基本原理により台が$\overline{K}_\varepsilon$に含まれるようなdistribution $f_\varepsilon(x)$のFourier像の$N(P)$への制限として表すことができる．一

方，$\bar{K} \subset \{|x|<A\}$とするとき$|\mathrm{Im}\zeta| \leqq \frac{\delta_\varepsilon}{A}|\zeta|$において(2.3)の右辺第二項は無視できて

$$|F_\varepsilon(\zeta)| \leqq C_\varepsilon \exp(H_{\partial K_\varepsilon}(\mathrm{Im}\zeta))$$

が得られる．故にこれを少し弱めた条件：$\gamma>0$に対し

$$|F_\varepsilon(\zeta)| \leqq C_{\varepsilon,\gamma} \exp(\gamma|\zeta|+H_{\partial K_\varepsilon}(\mathrm{Im}\zeta))$$

と解釈し，この増大度に対する正則領域

$$(2.5) \qquad |\mathrm{Im}\zeta| < \frac{\delta_\varepsilon}{A}(|\mathrm{Re}\zeta|+1)$$

での基本原理（まだ証明されていないがKaneko [1], IIと同様にできる）を用いて$F_\varepsilon(\zeta)$を領域(2.5)上の同じ増大度を満たす正則函数に拡張し，次いで河合の定理（[1], 補題5.1.2）を適用すれば，解析的特異台が∂Kに含まれる変形Fourier超函数$g_\varepsilon(x)$で$\hat{g}|_{N(P)}=F_\varepsilon$を満たすものが見出せる．差$\hat{f}_\varepsilon-\hat{g}_\varepsilon$は$N(P)$上で消え，従って再び基本原理により今度は特異台が$K_\varepsilon$に含まれるような変形Fourier超函数$h_\varepsilon$で

$$f_\varepsilon - g_\varepsilon = P(D)h_\varepsilon$$

を満たすものが求まる．故に（必要ならUを縮めることにより）方程式$Pv_\varepsilon=g_\varepsilon$の解$v_\varepsilon \in \mathscr{A}(U_\varepsilon)$を求め$u_\varepsilon=h_\varepsilon+v_\varepsilon$とおけば，これは$\mathscr{A}_P(U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon)$の元となる．これが実は$\mathscr{A}_P(U_\varepsilon \setminus K)$の元であることを示そう．$\varepsilon'<\varepsilon$を任意にとり，以上の構成法を$\varepsilon'$について行って得られる元を同じ記号に添え字$\varepsilon'$を付したもので表せば，(2.2)の同一の元から出発したのであるから

$$\hat{f}_\varepsilon - \hat{f}_{\varepsilon'} \in \widehat{\mathscr{E}'(\partial K_\varepsilon)}(N(P))$$

従って　$w_\varepsilon \in \mathscr{E}'(\partial K_\varepsilon)$により

$$(Ph_\varepsilon+g_\varepsilon)-(Ph_{\varepsilon'}+g_{\varepsilon'}) = f_\varepsilon - f_{\varepsilon'} = Pw_\varepsilon$$

$$\therefore P(h_\varepsilon - h_{\varepsilon'} - w_\varepsilon) = -(g_\varepsilon - g_{\varepsilon'})$$

即ち$w'_\varepsilon=h_\varepsilon-h_{\varepsilon'}-w_\varepsilon$は方程式$Pu=0$の$U_\varepsilon$における超函数解だから河合の正則性伝播定理（[1], 定理5.1.1）より実は$\mathscr{A}_P(U_\varepsilon)$の元となる．故に$h_\varepsilon=h_{\varepsilon'}+w_\varepsilon-w'_\varepsilon$は$U_\varepsilon \setminus K_{\varepsilon'}$で正則となり，$u_\varepsilon$もそこで正則である．$\varepsilon'<\varepsilon$は任意だから$u_\varepsilon \in \mathscr{A}_P(U_\varepsilon \setminus K)$となる．こうして得られた$u_\varepsilon$が射影系(1.1)の射と両立することは明らかである．証了．

上の表現定理から直ちに次の抽象的必要十分条件が得られる：

系２．２　ある固定したＫについて接続定理（１．１）が成り立つための必要かつ十分な条件は，Ｎ（Ｐ）上で次のPhragmén-Lindelöf型の原理が成り立つことである：$\varepsilon>0$を任意に固定したとき，Ｎ（Ｐ）上の正則函数$F(\zeta)$が

$$(2.6)\qquad |F(\zeta)| \leqq C\exp(H_{K_\varepsilon}(\mathrm{Im}\zeta))$$

を満たしており，かつ$0<\forall\varepsilon'<\varepsilon$について$F(\zeta)=G_{\varepsilon'}(\zeta)+H_{\varepsilon'}(\zeta)$という分解で

$$(2.7)\qquad |G_{\varepsilon'}(\zeta)| \leqq C\exp(H_{\partial K_\varepsilon}(\mathrm{Im}\zeta)),$$
$$|H_{\varepsilon'}(\zeta)| \leqq C_{\varepsilon'}\exp(H_{\partial K_{\varepsilon'}}(\mathrm{Im}\zeta)) + C_{\varepsilon'}\exp(-\delta_{\varepsilon'}|\zeta|+H_{K_{\varepsilon'}}(\mathrm{Im}\zeta))$$

という評価を満たすものを持てば，実は

$$(2.8)\qquad |F(\zeta)| \leqq C\exp(H_{\partial K_\varepsilon}(\mathrm{Im}\zeta))$$

が成り立つ．

この条件はわかり難いので，Ｋを固定しない場合の条件も与えておこう．

系２．３　任意のＫについて接続定理（０．１）が成り立つための必要かつ十分な条件は，Ｎ（Ｐ）上で次のPhragmén-Lindelöf型の原理が成り立つことである：Ｎ（Ｐ）上の正則函数$F(\zeta)$が$\mathrm{Im}\zeta_n\geqq 0$においてある正定数$A,\delta,a$をもって

$$(2.9)\qquad |F(\zeta)| \leqq C\exp(A|\mathrm{Im}\zeta'|+\max\{0,-\delta|\zeta|+a\mathrm{Im}\zeta_n\})$$

を満たせば，実はある別の定数Ｂについて

$$(2.10)\qquad |F(\zeta)| \leqq C\exp(B|\mathrm{Im}\zeta'|)$$

を満たす．

実際，この節の始めに注意したように任意のＫについての接続定理を考えるときはＫを特殊な形状，特に円柱$|x'|\leqq A,\ -a\leqq x_n<0$としても一般性を失わない．このとき

$$H_{\overline{K}}(\mathrm{Im}\zeta) = A|\mathrm{Im}\zeta'|+a(\mathrm{Im}\zeta)_+$$

であり，またε-近傍として同じような円柱形のものを選ぶことにより

$$H_{\overline{K}_\varepsilon}(\mathrm{Im}\zeta) = (A+\varepsilon)|\mathrm{Im}\zeta'|+(a+\varepsilon)(\mathrm{Im}\zeta)_+$$

等としてよい．すると（２．９）は（２．７）の二つ目の評価をある固定したεについて書き直しただけのものである．εはもはや動かす必要はないし射影極限をとる必要もない．最後の（２．１０）においてＢを一般にしたのはＫの近傍Ｕとして半径Ｂの円柱を含むような

大きいものをとっておけばこれでも（2.9）→（2.10）から解の接続が結論できるからである．この意味で(2.10)はもちろん

(2.10)′ $|F(\zeta)| \leqq C_\varepsilon \exp(\varepsilon|\zeta|+B|\mathrm{Im}\zeta'|)$

でも構わない．

さて上のような形の条件はHörmander [1]及びAndreotti-Nacinovich [1]の真似をすればN(P)上の多重劣調和函数に対する同様の条件に同値変形されるであろう．そのことからこれらの条件がPの主部にしかよらないことが結論できても不思議ではないと思われる．（Kがコンパクトのとき，接続定理Kaneko [1]の条件がPの低階にまで依存したのはむしろ例外的と考えられる状況証拠がある．） しかしこれらのことをいまだ遂行する余裕がないので，ここでは実際にどのようなPについて上の条件が満たされるかを調べよう．

定理2.4 Pの最高階はζ_nを含まないとする．このとき任意のKについて実解析解の接続定理(0.1)が成り立つ．

証明 仮定からx_1軸を非特性方向に選ぶとき方程式 $P(\zeta)=0$のζ_1に関する根 $\tau_j(\zeta')$は次の評価を満たす：

(2.11) $|\tau_j(\zeta')| \leqq \lambda|\zeta_n|^q+b|\zeta''|+C,\quad j=1,\ldots,m$

ここに$q<1$である（例えばKaneko [5], Remark 2.1を見よ）．これを(2.9)に代入すれば$\zeta''=(\zeta_2,\ldots,\zeta_{n-1})$とおくとき

(2.12) $|F(\tau_j(\zeta'),\zeta')|$

$$\leqq C\exp(A|\mathrm{Im}\zeta''|+bA|\zeta''|+\lambda|\zeta_n|^q+\max\{0,-\delta|\zeta_n|+a\mathrm{Im}\zeta_n\})$$

これはζ_nの函数として正則な領域がどのくらいあるか不明なので，jに関する基本対称式

$$F_k(\zeta') = \sigma(F(\tau_1(\zeta'),\zeta'),\ldots,F(\tau_m(\zeta'),\zeta')),\quad k=1,\ldots,m$$

をとると，これらはいずれもζ'の整函数となり，(2.12)の右辺の指数因子をk倍した評価を満たす．これらを今ζ_nのみの函数と思って上半平面$\mathrm{Im}\zeta_n>0$にPhragmén-Lindelöfの定理を適用しよう．$\frac{1}{2}\delta|\zeta_n|=a\mathrm{Im}\zeta_n$なる辺上で

$$|F_k(\zeta')| \leqq C\exp(kA|\mathrm{Im}\zeta''|+kbA|\zeta''|)$$

となるから（Cは(2.12)とは別の定数である），角領域の開きが$<\pi$であることと指数型であることを合わせて$\frac{1}{2}\delta|\zeta_n|\leqq a\,\mathrm{Im}\,\zeta_n$において上と同じ不等式が成り立つことがわかる．故に$\mathrm{Im}\,\zeta_n>0$上いたるところで

$$|F_k(\zeta')| \leqq C\exp(kA|\mathrm{Im}\,\zeta''|+kbA|\zeta''|+k\lambda|\zeta_n|^q)$$

が得られた．N(P)上のもとの函数$F(\zeta)$は$F_k(\zeta')$を係数とする方程式

$$t^m-F_1(\zeta')+\cdots+(-1)^mF_m(\zeta') = 0$$

の根であるから，以上より

$$|F(\zeta)| \leqq Ce^{B|\zeta|+\lambda|\zeta_n|^q}$$

が示された．ここに$B=(b+1)A$である．$F(\zeta)$がN(P)上でなくC^n上の整函数なら，これと(2.7)とから，例えば実の台を持つ解析汎函数の台の一意性により

$$|F(\zeta)| \leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|+B|\mathrm{Im}\,\zeta'|}$$

が得られるのだが，N(P)上の函数の場合にはこのことはPに依存する．例えば$P(\zeta)=\zeta_{n-1}+i\zeta_n$を考えてみれば反例が得られる．そこで我々は再び特性根の条件を利用しなければならない．

<u>補題2.5</u>　Pの最高階はζ_nを含まないとする．このときN(P)上の正則函数に対し次のPhragmén-Lindelöf型定理がなりたつ：

(2.13)　$|F(\zeta)| \leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|+A|\mathrm{Im}\,\zeta'|+a|\mathrm{Im}\,\zeta_n|}$,

(2.14)　$|F(\zeta)| \leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|+A|\zeta''|}$

の二つから，ある別の定数Bについて

(2.15)　$|F(\zeta)| \leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|+A|\mathrm{Im}\,\zeta_1|+B|\mathrm{Im}\,\zeta''|}$.

<u>証明</u>　この補題は通常のPhragmén-Lindelöfの定理のように多重劣調和函数に対し局所的な形で成り立つものと思われるがまだよくわからない．ここでは偏微分方程式論を用いた証明を与えておく．$F(\zeta)$を第一の評価で整函数に拡張したものを同じ文字で表し，また第二の評価で拡張したものを$G(\zeta)$とする．これらはそれぞれ台が$\{|x'|\leqq A,|x_n|\leqq a\}$に含まれる超函数f，及び$\{|z''|\leqq A,z_n=0\}$で支えられる解析汎函数gのFourier変換となっている．両者の差はPで割り切れ

$$f - g = P(D)h$$

と書ける．ここにhはf，gの支台の合併の凸包に台を持つ解析汎函数である．我々はこ

のｈが実は凸包をとる前のｆ，ｇの支台の合併と似た形の集合

(2.16) $\{|z_1|\leqq A\}\cup\{|x_1|\leqq A,\ |x''|\leqq B,\ |x_n|\leqq a\}$

で支えられることを示そう．それにはｈが(2.16)の近傍で正則な函数$\varphi(z)$のなす空間上の連続線型汎函数に拡張できることを見ればよい．正則函数をデータとするCauchy問題

$$(2.17)\quad \begin{cases} {}^tP(D)\psi(z) = \varphi(z), \\ D_1^k\psi|_{z_1=0} = 0, \quad 0\leqq k\leqq m-1 \end{cases}$$

の解ψを考える．作用素Ｐに対する仮定はＰの（従って${}^tP$の）特性帯に沿ってz_n座標が不変なことを意味するから，Bony-Schapira [1]の開発したCauchy問題の解の掃き出し法による求め方を適用すると，データφには依存しないような定数$B>>A$で，(2.17)の解が(2.16)の近傍で存在するようなものを見出すことができる．対応$\varphi\to\psi$は閉グラフ定理より連続となるから

$$\langle h,\varphi\rangle = \langle h,{}^tP\psi\rangle := \langle f-g,\psi\rangle$$

によりｈの所望の拡張が得られた．

さて，集合(2.16)はz_n座標について飛び出した部分が実の集合なので多項式凸となっており(Kaneko [2], Lemma2.13の証明参照)，従って

$$h = h_1 - h_2$$

とそれぞれ(2.16)の第一及び第二因子で支えられる解析汎函数の差に分解できる．故に

$$f - Ph_1 = g - Ph_2$$

と書き直され，この右辺は台が実の解析汎函数，即ち超函数である．故にその支台の凸包の一意性により

$$\mathrm{supp}(f-Ph_1)\subset\{|x_1|\leqq A,\ |x''|\leqq B,\ |x_n|\leqq a\}$$

となる．故に$F=f-Ph_1|_{N(P)}$は評価(2.15)を満たす．証了

補題2.5から定理2.4が得られることは系2.3の後で注意したところにより最早明らかである．さて，定理2.4は定理0のロ）を大幅に拡張するものであるが，小生としてはもう少し拡張できるのではないかと思っている．即ち，Ｐをζ_1,ζ_2二変数の多項式と見たとき主部がζ_nを含まなければ，或は同じことだが$P(\zeta)=0$のζ_1に関する根τ_jが

$$(2.18) \qquad |\tau_j(\zeta')| \leqq \varepsilon|\zeta_n| + C_\varepsilon|\zeta''|$$

を満たせば定理2.4と同じ結論が成り立つと期待しているが，細部を検討するに至っていない．そこまで改良出来れば以前直接Fourier解析の方法では示せなかった双曲型の極限$D_1^2+D_2D_n$や，双曲型の方法でも取扱えなかった$(D_1^2+D_2D_n)(D_1^2-D_2D_n)+1$などがすべ含まれることになる．

一般のKに対する考察はこれで終りであるが，付録でこの特別な場合である熱方程式を変数係数に拡張した結果を与えることにする．

注意2.6　コンパクトなKの場合の接続定理（Kaneko [1]）は実解析解の代わりに任意の準解析函数解をとっても全く同じ形で成り立つことをAbramczuk [1]が注意しているが，我々の定理2.4も任意の準解析的解に対して成り立つ．実際，解の正則性が証明の中で本質的に用いられるのは，Kを大きめに取り替えて良いと云うところで接続の一意性を用いているのと，(2.12)から$a|\mathrm{Im}\zeta_n|$の項を消去するのにPhragmén-Lindelöfの定理を用いているところであるが，後者については準解析解の場合(2.12)が

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt = \infty$$

なるある正値単調増加函数φを用いて

$$(2.12)' \quad |F(\tau_j(\zeta'),\zeta')|$$
$$\leqq C\exp(A|\mathrm{Im}\zeta''|+bA|\zeta''|+\lambda|\zeta_n|^q+\max\{0,-\varphi(|\zeta_n|)+a\mathrm{Im}\zeta_n\}$$

という評価で置き換わることに注意すれば同様にゆく．

注意2.7　$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\widehat{\mathscr{E}'(K_\varepsilon)}\{N(P)\}/\widehat{\mathscr{E}'(\partial K_\varepsilon)}\{N(P)\}$と$\widehat{\mathscr{B}[\overline{K}]}\{N(P)\}/\widehat{\mathscr{B}[\partial K]}\{N(P)\}$の間には自然な対応はないけれども

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}_P(U\setminus K)/\mathscr{A}_P(U) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \widehat{\mathscr{B}[\overline{K}]}\{N(P)\}/\widehat{\mathscr{B}[\partial K]}\{N(P)\} \\
\varinjlim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathscr{A}_P(U_\varepsilon\setminus K)/\mathscr{A}_P(U_\varepsilon) \arrow[d, hook] & \\
\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\widehat{\mathscr{E}'(K_\varepsilon)}\{N(P)\}/\widehat{\mathscr{E}'(\partial K_\varepsilon)}\{N(P)\} &
\end{tikzcd}$$

であるから$\mathscr{A}_P(U\setminus K)/\mathscr{A}_P(U)$の像になっているようなものについては自然な対応がつくはずである．これについては次が成り立つ：

命題2.1′　命題2.1で与えた特徴づけにおいて$\mathscr{A}_P(U\setminus K)$の元uの像になっているものは(2.3)を更に強くした次の条件で特徴づけられる：$t\geqq 0$の単調増加連続函数φで$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$ なるものと定数Cでεに依存しないものがあり

(2.3)′
$$|F_\varepsilon(\zeta)| \leqq C\exp(|\zeta|/\varphi(|\zeta|)+H_{\partial K_\varepsilon}(\mathrm{Im}\zeta)) + C\exp(|\zeta|/\varphi(|\zeta|)-\delta_\varepsilon|\zeta|+H_{\overline{K}_\varepsilon}(\mathrm{Im}\zeta))$$

実際，このときはhを取り替えたときの代表元の差は少くとも$\mathscr{B}[\partial K_\varepsilon]$の有界部分集合をなすことがわかるので，Kaneko [7], Remark 1.6により上記のような函数φを以て

$$\leqq C\exp(|\zeta|/\varphi(|\zeta|)+H_{\partial K_\varepsilon}(\mathrm{Im}\zeta))$$

と評価される．また評価(2.4)における定数C_εも一定の解析函数の特異点へ近付いたときの挙動によって決まる量だから，同じように抑えられるのである．逆にこの評価からは函数族$\{F_\varepsilon(\zeta)\}$が正規族となることがわかり，従って広義一様収束部分列の極限としてN(P)上の正則函数ですべての$\varepsilon>0$に対し(2.3)を満たすもの，従って特に

$$|F(\zeta)| \leqq C\exp(|\zeta|/\varphi(|\zeta|)+H_{\overline{K}}(\mathrm{Im}\zeta))$$

を満たすものが得られ，従ってこれから$\widehat{\mathscr{B}[\overline{K}]}\{N(P)\}/\widehat{\mathscr{B}[\partial K]}\{N(P)\}$の元が定まるが，それが昔の構成法で解uから直接作ったものと一致することは明らかである．なおこの節で述べた程度の内容ならこの形で$\mathscr{A}_P(U\setminus K)/\mathscr{A}_P(U)$を直接取扱っても，或は逆にもっと弱く，(2.2)の代わりに商空間

(2.2)′
$$\varinjlim_{\varepsilon\downarrow 0}\widehat{\mathscr{B}[\overline{K}_\varepsilon]}\{N(P)\}/\widehat{\mathscr{B}[\partial K_\varepsilon]}\{N(P)\}$$

で論じても同じである．ここでは将来N(P)上のPhragméh-Lindelöf型定理をHörmander [1]に倣って論ずるときのため，或は準解析函数解をも平行して扱うため，なるべく見安い不等式を用いた抽象的条件が欲しかったので上のような空間を採用した．

§3．凸錐の頂点への実解析解の局所的延長のための十分条件

この節では§1末尾に述べたように問題を局所化し実解析解が凸錐状特異点の頂点の近傍に接続できるための条件を探る．そこで挙げた例からもわかる通り全く一般の状況では接続できる近傍の大きさは解に依存する．故に解の延長がPhragmēn-Lindelöf型の定理一発で保証されるような粗っぽい議論では完全な解答が得られない．以下の議論のためには凸錐を例えば

$$K = \left\{\frac{|x_1|}{A}+\frac{|x''|}{A''}-1\leqq\frac{x_n}{a}<0\right\}$$

とおき，その台函数もそれに応じて

$$H_{\overline{K}}(\mathrm{Im}\zeta) = \max\{A|\mathrm{Im}\zeta_1|+A''|\mathrm{Im}\zeta''|,a(\mathrm{Im}\zeta_n)_+\}$$

と正確に記しておかなければならない．

まず前節と同様の議論だけで片付く場合を扱う．

定理3.1　P(D)はKaneko[5]，定義2.4の意味で$\pm x_1>0$にidx_n ∞-双曲型とする．即ち，適当な正定数$q<1,\lambda,b,c,C$があり，代数方程式$P(\zeta_1,\zeta')=0$の根$\zeta_1=\tau_j(\zeta')=\tau_j(\zeta'',\zeta_n)$はいずれも$\mathrm{Im}\zeta_n>0$において

(3.1)　　$|\mathrm{Im}\tau_j(\zeta'',\zeta_n)| \leqq \lambda|\zeta'|^q+b|\mathrm{Im}\zeta_n|+c|\zeta''|+C$

なる不等式を満たしているとする．このときKのx_1方向の厚みが十分小さければ（具体的には$A/a<1/b$ならば）$\mathscr{A}_P(U\setminus K)$の任意の元はKの頂点$(0,...,0,a)$のある近傍まで実解析解として延長できる．

証明　命題2.1（の証明）よりuのGrušin表現は$\forall\varepsilon>0$に対し

(3.2)　$|F_\varepsilon(\zeta)|$

$$\leqq C_\varepsilon e^{(A+\varepsilon)|\mathrm{Im}\zeta_1|+(A''+\varepsilon)|\mathrm{Im}\zeta''|+\varepsilon(\mathrm{Im}\zeta_n)_+}$$
$$+C_\varepsilon e^{-\delta_\varepsilon|\zeta|+\max\{(A+\varepsilon)|\mathrm{Im}\zeta_1|+(A''+\varepsilon)|\mathrm{Im}\zeta''|,(a+\varepsilon)(\mathrm{Im}\zeta_n)_+\}}$$

を満たす元で代表される（第二項の評価は(2.3)と完全に同じではないがKのε近傍の採り方を錐状にすればこうなる）．定理の主張は第二項の評価を$\exists A'>A,A''$，及び$\exists a'<a$について

$$\max\{A'(|\mathrm{Im}\zeta_1|+|\mathrm{Im}\zeta''|),a'(\mathrm{Im}\zeta_n)_+\}$$

で置き換えられれば従う．(3.2)に根の評価の仮定を代入すればN(P)上$\mathrm{Im}\zeta_n>0$なるところで

(3.3) $|F_\varepsilon(\tau_j(\zeta'),\zeta')|$
$$\le C_\varepsilon e^{\lambda|\zeta'|^q+(bA+(bA+1)\varepsilon)|\mathrm{Im}\zeta_n|}$$
$$+C_\varepsilon e^{-\delta_\varepsilon|\zeta_n|+\max\{b(A+\varepsilon),a+\varepsilon\}|\mathrm{Im}\zeta_n|+C'|\zeta''|}$$

が成り立つ．再びこれらの基本対称式$F_k(\zeta')$をとろう．これらは$\mathrm{Im}\zeta_n>0$において上の不等式の指数部分をk倍した不等式を満たす．仮定$bA<a$より，εが十分小なら

$$a'=bA+(bA+1)\varepsilon<a$$

としてよい．故に一変数ζ_nの整函数$G(\zeta_n)=F_k(\zeta')e^{ika'\zeta_n}$に前節におけると同様Phragmēn-Lindelöfの定理を二度適用すれば，まず$\mathrm{Im}\zeta_n\ge(\delta_\varepsilon/2(a-a'+\varepsilon))|\zeta_n|$において$G(\zeta_n)\le C_\varepsilon e^{C'|\zeta''|}$．従って結局

$$|F_\varepsilon(\zeta)| \le Ce^{C''|\zeta''|+\lambda|\zeta_n|^q a'|\mathrm{Im}\zeta_n|}$$

が得られる．これともとの評価式(3.1)より得られる

$$|F_\varepsilon(\zeta)|$$
$$\le Ce^{\max\{(A+\varepsilon)|\mathrm{Im}\zeta_1|+(A''+\varepsilon)|\mathrm{Im}\zeta'|,\ (a+\varepsilon)(\mathrm{Im}\zeta_n)_+\}}$$

とから，あるA′について$\forall\gamma>0$に対し

$$|F_\varepsilon(\zeta)| \le C_\gamma e^{\gamma|\zeta|+A'(|\mathrm{Im}\zeta_1|+|\mathrm{Im}\zeta''|)+a'(\mathrm{Im}\zeta_n)_+}$$

が結論できればよい．因子$e^{ia'\zeta_n}$の調節によりこれは結局次に帰着できる：

補題3.2　P(D)は定理3.1の仮定を満たす作用素とし$0<a'<a$とする．このときもし$bA\le a'$ならN(P)上の正則函数$F(\zeta)$に対し次のPhragmēn-Lindelöf型原理が成り立つ：

(3.4)　$|F(\zeta)|\le C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|+\max\{A|\mathrm{Im}\zeta_1|+A''|\mathrm{Im}\zeta''|,\ a|\mathrm{Im}\zeta_n|\}}$

(3.5)　$|F(\zeta)|\le C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|+C|\zeta''|+a'|\mathrm{Im}\zeta_n|}$

の二つから，ある別の定数Bについて

(3.6)　$|F(\zeta)|\le C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|+A|\mathrm{Im}\zeta_1|+B|\mathrm{Im}\zeta''|+a'|\mathrm{Im}\zeta_n|}$

が成り立つ．

この補題の証明は正則Cauchy問題を用いる補題2.5の方法と全く同様である．実は補題2.5はここで$b=a'=0$としたものに他ならぬ．今の場合$P(\zeta)$の主部はζ_nを含むがこれにつき“双曲型”であるので，$bA\le a'$なる条件の下に(3.4)，(3.5)に対応する解析汎函数の支台の合併をζ''につき適当に膨らませた集合上で正則Cauchy問題は大

域的に解けるのである．（先にもちょっと触れたが，我々は補題2．5，3．2が（そして対応する定理自身も）それぞれに究極的な形の改良形を持つこと，即ち，仮定をそれぞれ「P（D）のD_1，D_nについての主部がD_nを含まぬ」，及び「P（D）が（3．1）の代わりに（0．4）を満たす」という条件で置き換えても同じ結論が得られるということを予想しているので，後の便のため別々の補題として扱ったのである．

補題3．2から定理3．1を証明するのは前節と全く同様なの省略する．

さて上の定理は出発点となった波動方程式の例に適用してみると古典的に解が延ばせる範囲までは大丈夫という自明なことしか主張していない．勿論上の定理は超双曲型方程式等古典的範ちゅうでは双曲型の理論が適用できないような例も含んではいるが，出発点となった現象を全く説明していない点で不満である．そこで次にそれを説明するような定理を求めたいのであるが，残念ながらここから先は準備不足で，次の予想を述べるにとどめたい．

予想3．3　$n\geqq 3$とし代数方程式$P(\zeta_1, \zeta')=0$の根$\zeta_1=\tau_j(\zeta')$はすべて次の不等式を満たすとする：

$$(3.7)\quad |\mathrm{Im}\,\tau_j(\zeta')| \leqq \lambda|\zeta'|^q + b|\mathrm{Im}\,\zeta_2| + C(|\zeta'''| + |\mathrm{Re}\,\zeta_n|) + c|\mathrm{Im}\,\zeta_n| + C$$

ここに$\zeta'''=(\zeta_3, \ldots, \zeta_{n-1})$．このとき$x_1$方向に十分薄い（具体的には$cA<a$なる）凸錐Kについて$\mathscr{A}'_p(U\setminus K)$の任意の元uはKの頂点の（uに依存した）ある近傍まで実解析的に延長できる．

証明の方針として考えているのは次節1）に述べるultra-hyperfunction値境界値問題の方法のFourier解析による原型といったものである．詳しいことは次の機会に御報告したい．なお上例の波動方程式の場合は第一座標と第二座標を取替えた

$$(D_1^2 - D_2^2 + \ldots + D_n^2)u = 0$$

という方程式にこれを適用しようと言うのである．この方程式の特性根が（3．7）を満たすことは簡単な計算で確かめることができる．

§4．変数係数の作用素に対する凸錐の頂点への実解析解の局所的延長の諸方法

一般の変数係数の場合はまだ具体的な結果を出していないので、例によってハッタリになるが考えているところを述べよう．現在大きく分けて三つの攻略法を考えている．

1）　Ultra-hyperfunction値境界値問題を用いる方法　特異集合Kが非特性超平面$x_1=0$に含まれているとき$u\in\mathscr{A}_P(U\setminus K)$のGrušin表現$F(\zeta)$に$P(\zeta_1, \zeta')=0$の根$\tau_j(\zeta')$を代入したもの$F(\tau_j(\zeta'), \zeta')$から作った基本対称式$F_k(\zeta')$, $k=1, ..., m$は、$F(\zeta)$を$P(\zeta)$で割り算したときの剰余項のζ_1^{m-k}の係数に他ならず、従ってこれはuの$x_1\to\pm 0$への超函数論的な境界値の差（を適当にコンパクト台としたもの）のFourier変換像に他ならない．このことに気付いたのが変数係数の場合の境界値理論を用いた小生による除去可能特異点理論の出発点となったのであった．このように薄いKの場合はEhrenpreis-PalamodovのFundamental Principleが存在を主張する$\widehat{\mathscr{B}[L]}\to\widehat{\mathscr{B}[L]}\{N(P)\}$の逆写像が上のように簡単な手続きで大域的に与えられるのでFourier解析としても易しい部類に属する．これに反しKがx_1方向に厚みをもつと上の手続きはもはや$\widehat{\mathscr{B}[L]}$の元を与えてはくれない．評価に$|\mathrm{Re}\,\zeta|$が有限の大きさで現れるため、この手続きで大域的に得られたものは台が実軸からはみ出した解析汎函数となってしまうのである．Fundamental Principleの証明でもこのような場合は上の手続きを局所的にのみ利用し，$\widehat{\mathscr{B}[L]}$の評価と両立するような大域的整函数を作るには更に増大度付きコホモロジーを解くという面倒なことをせねばならなくなるのであった．

しかしながらこの解析汎函数境界値は、抽象的に得られるFundamental Principleによる逆像よりもある意味で扱い易い．現に始めにかかげた定理0のロ）の場合のKaneko［ 2 ］における証明法、及びそれを拡張した§2の議論においては、そうして出て来た解析汎函数の台の評価をすることによって解の接続定理を導いているのである．このように全く一般のKでは境界値は局所化できず、従って変数係数の方程式には使えそうもない．しかし解析函数でも支台が凸錐の先端部のように漸近的に実となっている場合は、その頂点において無限小的に局所的な意味を持ち得る．このような考え方は約15年前、Trèves［ 1 ］による初期値問題のこのクラスでの可解性を論じた仕事を森本氏がセミナーで紹介した際既に小松先生により指摘されており、そのような解析汎函数を

"代数的閉包"のように用いて通常の超函数の範囲での局所可解性などを議論すれば見通しが良くなるであろうという主旨であった．その後この種の解析汎函数はBaouendi-Goulaouic [1]の特異Caucny問題，Birkeland-Persson [1]の零解の構成や小生によるGreenの公式の証明（[5], Appendix B）などで散発的に用いられたが，最近大阿久氏 [3] は初期値問題よりも更に一般的な境界値問題の枠組でこの種の解析汎函数を実軸上の層としてとらえる理論を与えた．*) 以上のような状況によりKaneko [8] で論じられた実解析解の接続定理は今や本質的な困難なしにKが非特性なx_1方向に十分薄い凸錐の場合に拡張することができるであろうと思われる．

2）<u>非特性超平面への境界値の族が満たす微分方程式に対する内部正則性伝播の問題に転換する方法</u>　以下簡単のためKの頂点は原点0とし，Kは0の近くで無限小的に固有凸錐となっているとする．このとき0を境界点とする半空間$E_\xi=\{\langle x,\xi\rangle>0\}$でKと交わらぬようなものの族を考える．$\xi$は例えば$\nu=(0,...,0,-1)$の近傍を動けると仮定してよい．$u(x)\in\mathscr{A}'_P(U\setminus K)$に対しこれを$E_\xi$におけるPu=0の局所実解析解と見なせば，$(0,\xi)$が非特性なる限り境界値$u_j(x',\xi)=D_n^j u(x)\,|_{\langle x,\xi\rangle\to+0}$, $j=0,...,m-1$を考えることができる．但しここで$\langle x,\xi\rangle=0$内の局所座標として$x'=(x_1,...,x_{n-1})$を共用した．$\{u_j\}_{j=0}^{m-1}$ はx', ξの超函数として実解析解の境界値にふさわしい特異スペクトル評価を持ち，且つx', ξに関するある連立微分方程式を満足する．これらを内部問題として処理することによりu_jの$(0,\nu)$における実解析性が導ければ，もとの解が原点の近傍まで延長できることになる．小生はこの種のアプローチが苦手なのでまだ具体的な結果に到達できないでいるが，近頃の第二超局所化の方法などを組み合わせれば面白い結果が出るに違いないと期待している．

3）<u>凸錐の頂点における片岡層で変数係数の方程式に対するFundamental Principleを実現する方法</u>　境界値をとることは対称多項式をとることに相当するので，真の情報をいわば平均値に置き換えてしまうという点で精密な議論には不利となる．定数係数の場合のFundamental Principleの真似をするには，$F(\tau_j(\zeta'),\zeta')$を$N(P)$上の函数として直接考察しなければならない．そこでKが固有凸錐のときR^nの複

---

*) 大阿久氏は上記のセミナーとは無関係にBaouendi-Goulaouic [1]における解析汎函数の用法にヒントを得てその理論を始めたものと思われる．

素化$X\tilde{=}C^n$内における一般化された意味でのKの余法球束$\pi: S^*_K X \to K$を考え、この上に片岡理論[1]の真似をして層

$$\mathscr{C}_{K|X} = \mathscr{H}^{n-1}_{S^*_K X}(\pi^{-1}\mathscr{O})$$

で$\pi_* \mathscr{C}_{K|X} = \Gamma_K(X, \mathscr{B})$となっているようなものを導入しよう．但し層とはいっても我々はKの頂点0における茎しか考えない（Kが無限小の意味で固有ならざる錐のときは“稜”に沿って定義された層を考える必要がある．片岡の理論は$K=\overline{M}_+$（無限小半空間）の場合であったが、Kが凸集合なら全く同様にゆく．このような拡張が有用なことは既にKaneko[4]でも注意したが、まだ細部を検討したわけではない．） 以下は全くの妄想であるので眉にツバをつけてお聞き願いたい．

$u \in \mathscr{A}'_P(U \setminus K)$に対しこれを$\mathscr{B}(U)$の元まで延長してPを施して得られ$\mathscr{B}[K \cap U]$の元から$\mathscr{C}_{K|X}$の切断が得られるが，これをPの主部の零点$N(P_m(z, \zeta))$に制限したもの$\tilde{d}u$はuの$\mathscr{B}(U)$への延長によらずに定まるに違いない．そしてuの実解析性から境界値の特異スペクトル評価を保証するある良い特性根$\tau_j(0, \zeta^0)$の存在の仮定の下にこの元$\tilde{d}u$が対応する点$(0, \zeta^0)$において$\mathscr{C}_{K|X}|_{N(P_m)}$の芽として0になることが従うであろう．Kが0で無限小の意味で固有凸錐なら$S^*_K X$の原点における繊維の次元はかなり大きく，従って変数ζは複素領域をかなり自由に動けるので，多様体$N(P_m)$に沿っての一意接続性が成り立ち，これより点$(0, \zeta^0)$を含む$N(P_m)$の既約分枝全体に0が伝播するであろう．こうしてこのような（即ち層$\mathscr{C}_{K|X}$から誘導された層が一意接続性を持つという）意味での各既約成分に少くとも一つの“良い”特性根の存在の仮定の下に定数係数のときの究極的な結果にかなり近い形の局所接続定理が得られるであろう．これはいわば定数係数のときのFundamental Principleの理論を$N(P) \subset C^n$の代わりに$N(P_m) \subset (S^*_{K|X})_0$で実現しようというものである．乞御期待！

付録．熱方程式に対する函数解析的方法

熱方程式

(A.1) $$Pu = \left(\frac{\partial}{\partial t} - A(x, D_x)\right) u(x, t) = 0$$

を考える．ここにAはxの実解析函数を係数とする二階楕円型作用素である．この方程式に対し任意の“太った”Kについて実解析解の接続定理（0.1）が成り立つことを示そう．Kの近傍UとしてAがそこで定義されまた解uが$U \setminus K$で定義されているような十分小さいものをとる．Hartogsの定理の証明と同様，接続は$\forall a' < a$に対し$K \cap \{x_n < -a'\}$まで行えばよいから，始めから$U = \Omega \times]0, T[$とし，また特異点集合はあるコンパクト集合$K \subset \Omega$を以て$K \times]0, \delta[$の形であるとしても一般性を失わない．

定理A.1 （A.1）に対し実解析解の接続定理

$$\mathscr{A}_P(\Omega \times]0, T[\setminus \Omega \times]\delta, T[) / \mathscr{A}_P(\Omega \times]0, T[) = 0$$

が成り立つ．

必要なら更にUを縮めることにより，$\partial\Omega$は実解析多様体で，解uは側壁及び底面（以下単に境界面という）

$$\partial\Omega \times]0, T[\cup \overline{\Omega} \times \{0\}$$

の近傍まで解析的であると仮定してよい．すると混合問題のデータとして実解析的な函数

(A.2) $$\begin{cases} \varphi(x, t) = u(x, t)|_{\partial\Omega \times [0, T]}, \\ \psi(x) = u(x, 0) \end{cases}$$

が得られる．これらは$\partial\Omega \times \{0\}$において

$$\varphi(x, 0) = \psi(x)|_{\partial\Omega}$$

を始めとする無限個の両立条件を満たす．それを陽に書き表わすのは難しそうだが我々にはそれは必要ない．今コンパクト集合$\overline{\Omega}[0, T]$の十分小さいStein近傍Wをとり，それと解析的多様体$\partial\Omega \times R \cup \{t = 0\}$の自然な複素化との交わりの上で$\varphi, \psi$は定義されているとすれば，Cartanの定理BによりW上の正則函数vで

$$v|_{\partial\Omega \times [0, T]} = \varphi, \qquad v|_{t=0} = \psi$$

を満たすものが存在する．するとw=u-vは条件

$$w|_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0, \qquad w|_{t=0} = 0$$

を満たし，f=Pwは$\overline{\Omega} \times [0, T]$上実解析的となる．

<u>補題A.2</u>　fが$\overline{\Omega}\times[0,T]$で実解析的ならば混合問題

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t}-A\right)w = f, \\ w|_{\partial\Omega} = 0, \quad w|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

の解で$\overline{\Omega}\times]0,T[$上実解析的なものが存在する．

<u>証明</u>　Aは$L^2(\Omega)$上の解析半群を生成する．即ち，$e^{\tau A}$は$\mathrm{Re}\,\tau>\lambda|\mathrm{Im}\,\tau|$において$B(L^2(\Omega),L^2(\Omega))$-値正則函数となる．故に今$f$が$\overline{\Omega}\times[0,T]$の複素近傍$V\times\Theta$で正則とすれば，公式

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \int_0^t e^{(t-s)A}f(x,s)\,ds \\ &= \int_0^{t_0} e^{sA}f(x,t-s)\,ds + \int_{t_0}^t e^{sA}f(x,t-s)\,ds \end{aligned}$$

で与えられる上の問題の解wは$x\in\overline{\Omega}$を固定するときtにつき領域$\{\mathrm{Re}\,\tau>\lambda|\mathrm{Im}\,\tau|\}\cap\Theta$まで解析接続できる．一方$x$に関する解析的準楕円性により$t>0$を固定する毎に$\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-A\right)w=f$の解$w$は$V$のみで決まる$\overline{\Omega}$のある一定の複素領域まで解析接続できる．故にMalgrange-Zernerの定理より$w(x,t)$は(x,t)の函数として$\overline{\Omega}\times]0,T]$の近傍で正則となる．証了

我々は両立条件を仮定していないので解は一般に$t=0$では$L^2(\Omega)$の意味でしか境界条を満たしていないことに注意されたい．さて，今や定理7.1の証明は容易である．即ち，上のようにして構成されたwともとのuとを比較するとき，

$$u|_{\partial\Omega} = (w+v)|_{\partial\Omega}, \quad u|_{t=0} = (w+v)|_{t=0}$$

且つ，共通の定義域では

$$Pu = P(w+v) = 0$$

を満たしている．故にHarnackの一意性定理により少くとも$0\leq t<\delta$では$u=w+v$となる．故に両辺が実解析的な限りこの等式は成立する，ということはuが実解析解として$\Omega\times]0,T[$まで延長されたことを意味する．

以上の証明は古典的なことしか使っていないので（鍵となるのは補題A.2だけである）前世紀から知られていても不思議ではないと思われるが文献を知らない．Aが係数にtを含む場合に結果を拡張するのはそう難しくないであろう．

文献

Abramczuk W.[1]:On continuation of quasi-analytic solutions of partial differential equations to compact convex sets. J. Austr. Math. Soc. 39(1985),306-316.

Andreotti A. & Nacinovich M.[1]:Analytic convexity and the principle of Phragmén-Lindelöf. Univ. di Pisa,1981.

Baouendi M.S. & Goulaouic C.[1]:Cauchy problems with characteristic initial hypersurface. Comm. Pure Appl. Math. 26(1973), 455-475.

Birkeland B. & Persson J.[1]:The local Cauchy Problem in R^2 at a point where two characteristic curves have a common tangent. J. Diff. Eq. 30(1978),64-88.

Bony J.-M. & Schapira P.[1]:Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. Inventiones Math. 17(1972),95-105.

Hörmander L.[1]:On the existence of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients. Inventiones Math. 21(1973),151-182.

Kaneko A.[1]:On continuation of regular solutions of partial differential equations to compact convex sets. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec.1A 17(1970),567-580; II. ibid.18(1972),415-433.

——— [2]:On continuation of regular solutions of partial differential equations with constant coefficients. J. Math. Soc. Japan 26(1974),92-123.

——— [3]:Note on continuation of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients. Proc. Japan Acad. 51(1975),262-264.

——— [4]:On continuation of real analytic solutions of linear partial differential equations, Astērisque 89-90(1981),11-44.

——— [5]:Estimation of singular spectrum of boundary values for some semihyperbolic operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec.1A 27(1980),401-461.

——— [6]:Removable singularities of solutions of systems of linear partial differential equations with real analytic coefficients, Ann. Math. Stat. Dankook Univ. 12(1985),7-28.

——— [7]:Representation of hyperfunctions by measures and some of its applications, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec.1A 19 (1972),321-352.

——— [8]:Singular spectrum of boundary values of solutions of partial differential equations with real analytic coefficients, Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tolyo 25(1975),59-68

Kataoka K.[1]:On the theory of Radon transformations of hyperfunctions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec.1A 28(1981),331-413.

Kawai T.[1]:On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec.1A 17(1970),467-517.

Mizohata S.[1]:On the hyperbolicity in the domain of real analytic functions and Gevrey classes, Hokkaido Math. J. 12(1983), 298-310.

Oaku T.[1]:Boundary value problems for systems of linear partial differential equations and propagation of micro-analyticity, preprint.

——— [2]:Removable singularities of solutions of linear partial differential equations —Systems and Fuchsian equations—, preprint.

——— [3]:A new formulation of local boundary value problems in the framework of hyperfunctions, 数理解析研究所講究録 558 (1985), 265-291.

Trèves F. [1]:Ovchyannikov theorem and hyperdifferential operators, Notas de Matematica No.46, IMPA, Brazil, 1968.